GEOMETRIA II

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS II - JUNHO, 2016

(1) Considere o caminho no plano definido por $\gamma(t) := re^{-at}(\cos t, \sin t)$, com $r, a > 0$ fixos e $t \in [0, \infty[$.
(a) Verifique que γ é um caminho regular.
(b) Mostre que γ tem comprimento finito, isto é $\lim_{L\to\infty} \int_0^L ||\gamma'(t)||dt$ existe e é finito.
Resolução possível:
(a) O vector velocidade é:

$$\gamma'(t) = -are^{-at}(\cos t, \sin t) + re^{-at}(-\sin t, \cos t) = re^{-at}\left(-a\cos t - \sin t,\, \cos t - a\sin t\right),$$

que é uma função de classe C^∞, e anula-se apenas quando $a\cos t + \sin t = \cos t - a\sin t = 0$. Não é difícil ver que estas duas equações nunca se anulam simultaneamente; em alternativa, podemos calcular directamente a norma do vector velocidade:

$$\begin{aligned}
||\gamma'(t)|| &= re^{-at}||(-a\cos t - \sin t,\, \cos t - a\sin t)|| \\
&= re^{-at}\sqrt{(a\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - a\sin t)^2} = re^{-at}\sqrt{a^2+1}.
\end{aligned}$$

Como $\sqrt{a^2+1} > 0$, e $re^{-at} > 0\ \forall t \in \mathbb{R}$, vemos que $\gamma'(t) \neq 0\ \forall t \in [0, \infty[$, pelo que γ é um caminho regular.
(b) Usando a fórmula de $||\gamma'(t)||$ na alínea (a), temos

$$\begin{aligned}
\lim_{L\to\infty} \int_0^L ||\gamma'(t)||\, dt &= \lim_{L\to\infty} (r\sqrt{a^2+1}) \int_0^L e^{-at}dt \\
&= (r\sqrt{a^2+1}) \lim_{L\to\infty} \left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_0^\infty = (r\sqrt{a^2+1})\frac{1}{a},
\end{aligned}$$

pelo que o comprimento de γ é finito e igual a $\frac{r}{a}\sqrt{a^2+1}$.

(2) Considere um caminho métrico $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ (ou seja, com $||\gamma'(s)|| = 1$) com curvatura positiva constante $\kappa > 0$ e com torção nula.
(a) Sendo $n(s)$ o vector unitário normal, mostre que $\alpha(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa}n(s)$ é um caminho constante.
(b) Usando a alínea (a), mostre que $\gamma(s)$ é um arco de circunferência.
Resolução possível:
(a) Sendo $v(s) = \gamma'(s)$ o vector velocidade (unitário), temos $\gamma''(s) = \kappa\, n(s)$ (por definição de curvatura de γ em $\mathbb{R}^3$), e uma das fórmulas de Frenet simplifica-se, usando o facto de que a torção é nula $\tau(s) = 0$ e $\kappa(s) = \kappa$ é uma constante:

$$n'(s) = -\kappa(s)\, v(s) + \tau(s)\, b(s) = -\kappa\, v(s),$$

onde $b(s) = v(s) \times n(s)$ é o vector binormal. Assim,

$$\alpha'(s) = \gamma'(s) + \frac{1}{\kappa}n'(s) = v(s) + \frac{1}{\kappa}(-\kappa v(s)) = 0.$$

Concluímos que $\alpha'(s) = 0$ para todo o $s \in [a, b]$, pelo que α é um caminho constante.
(b) Pela alínea (a), $\alpha(s) = p \in \mathbb{R}^3$ é um ponto fixo no espaço. Assim, $\gamma(s) = \alpha(s) - \frac{1}{\kappa}n(s) = p - \frac{1}{\kappa}n(s)$ pelo que

$$||\gamma(s) - p|| = || - \frac{1}{\kappa}n(s)|| = \left|-\frac{1}{\kappa}\right| ||n(s)|| = \frac{1}{\kappa}.$$

Concluímos que a distância de $\gamma(s)$ a p é uma constante, pelo que $\gamma(s)$ está numa esfera centrada em p. Por outro lado, $\tau \equiv 0$ (torção nula), e outra fórmula de Frenet diz-nos que $b'(s) = \tau(s)\, n(s) = 0$. Assim $b(s)$ é constante, o que implica que $\gamma(s)$ está sempre no mesmo plano (ortogobal a $b(s)$). Finalmente, como $\gamma(s)$ está na intersecção de um plano com uma esfera, forma parte de uma circunferência.

(3) Considere o catenóide, parametrizado por $\phi(u, v) = c(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$, com $c > 0$ fixo e $u, v \in \mathbb{R}$.
(a) Verifique que a primeira e segunda formas fundamentais de ϕ são diagonais, e determine-as.
(b) Calcule as curvaturas principais e a curvatura escalar (de Gauss) em função de u, v. Determine os pontos onde a curvatura escalar é máxima, em valor absoluto.

Resolução possível:
(a) Vamos calcular as derivadas de ϕ:

$$\begin{aligned}
\phi_u &= c\,(\sinh u\, \cos v,\, \sinh u\, \sin v,\, 1) \\
\phi_v &= c\,(-\cosh u\, \sin v,\, \cosh u\, \cos v,\, 0) \\
\phi_{uu} &= c\,(\cosh u\, \cos v,\, \cosh u\, \sin v,\, 0) \\
\phi_{vv} &= c\,(-\cosh u\, \cos v,\, -\cosh u\, \sin v,\, 0) = -\phi_{uu} \\
\phi_{uv} = \phi_{vu} &= c\,(-\sinh u\, \sin v,\, \sinh u\, \cos v,\, 0)
\end{aligned}$$

as normas (ao quadrado) dos dois primeiros vectores:

$$||\phi_u||^2 = c^2(\sinh^2 u + 1) = c^2 \cosh^2 u = ||\phi_v||^2,$$

e o produto interno

$$\phi_u \cdot \phi_v = c^2(\cosh u\, \sinh u\, \sin v\, \cos v - \cosh u\, \sinh u\, \sin v\, \cos v) = 0.$$

Assim a primeira forma fundamental é diagonal (é até escalar):

$$g = \begin{pmatrix} c^2 \cosh^2 u & 0 \\ 0 & c^2 \cosh^2 u \end{pmatrix}.$$

Para a segunda forma fundamental, determinamos o vector normal unitário:

$$n = \frac{\phi_u \times \phi_v}{||\phi_u \times \phi_v||} = \frac{1}{\cosh^2 u}(-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v,\, \sinh u\, \cosh u)$$

e finalmente, obtemos:

$$h = \begin{pmatrix} \phi_{uu} \cdot n & \phi_{uv} \cdot n \\ \phi_{uv} \cdot n & \phi_{vv} \cdot n \end{pmatrix} = \frac{1}{\cosh^2 u} \begin{pmatrix} -c \cosh^2 u & 0 \\ 0 & c \cosh^2 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

que também é diagonal.
(b) Para determinar as curvaturas, consideramos o operador curvatura

$$Q = g^{-1} h = \frac{1}{c^2 \cosh^2 u} \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^{-1} \cosh^{-2} u & 0 \\ 0 & c^{-1} \cosh^{-2} u \end{pmatrix}.$$

Como esta matriz é diagonal, as curvaturas principais são dadas pelas entradas não nulas $k_1, k_2 = \pm c^{-1} \cosh^{-2} u$, e a curvatura de Gauss é $K = k_1 k_2 = -c^{-2} \cosh^{-4} u$. Esta função (apenas de u) tem máximo onde $\cosh u$ tem mínimo, ou seja, em $u = 0$. Estes pontos correspondem à circunferência $\phi(0, v) = c(\cos v, \sin v, 0) \subset \mathbb{R}^3$, ou seja a intersecção do catenóide com o plano $z = 0$.

(4) Seja $R > 0$, e S_R o parabolóide (com bordo) parametrizado por $\phi(u,v) = (u\cos v,\, u\sin v,\, u^2)$, com $v \in [0, 2\pi]$ e $u \in [0, R]$.
(a) Verifique que as formas de Cartan são dadas por $\tau_1 = \sqrt{1+4u^2}\,du$ e $\tau_2 = u\,dv$.
(b) Mostre que $K = \frac{4}{(1+4u^2)^2}$.
(c) Calcule $\int_{S_R} K\,dA$, onde dA representa o elemento de área, e determine o limite do integral quando $R \to \infty$.
Resolução possível:
(a) Para a parametrização ϕ temos:

$$\begin{aligned} \phi_u &= (\cos v,\, \sin v,\, 2u) \\ \phi_v &= (-u\,\sin v,\, u\,\cos v,\, 0), \end{aligned}$$

pelo que $||\phi_u||^2 = 1 + 4u^2$, $||\phi_v||^2 = u^2$ e $\phi_u \cdot \phi_v = 0$. Como estamos no caso ortogonal, as formas de Cartan são dadas por:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= ||\phi_u||\,du = \sqrt{1+4u^2}\,du \\ \tau_2 &= ||\phi_v||\,dv = u\,dv, \end{aligned}$$

como pretendido (e o elemento de área é $dA = |\tau_1 \wedge \tau_2| = u\sqrt{1+4u^2}\,du\,dv$).
(b) Primeiro determinamos a 1-forma de conexão ω_{12}, definida por

$$\begin{aligned} d\tau_1 &= \omega_{12} \wedge \tau_2 \\ d\tau_2 &= \omega_{21} \wedge \tau_1 = \tau_1 \wedge \omega_{12}. \end{aligned}$$

Fazendo as derivadas exteriores obtemos:

$$\begin{aligned} 0 = d\tau_1 &= \omega_{12} \wedge \tau_2 = u\,\omega_{12} \wedge dv \\ du \wedge dv = d\tau_2 &= \tau_1 \wedge \omega_{12} = du \wedge \sqrt{1+4u^2}\,\omega_{12}. \end{aligned}$$

A primeira destas equações diz-nos que ω_{12} não tem componente em du e a segunda diz-nos que $\omega_{12} = (1+4u^2)^{-1/2}dv$. Finalmente, a equação de Cartan, $d\omega_{12} = -K\tau_1 \wedge \tau_2$, diz-nos que:

$$(-\frac{1}{2})(8u)(1+4u^2)^{-3/2}du \wedge dv = -Ku\sqrt{1+4u^2}\,du \wedge dv.$$

Igualando os coeficientes destas 2-formas, obtemos:

$$K = \frac{4}{(1+4u^2)^2}.$$

(c) Nas coordenadas $(u,v) \in [0,R] \times [0,2\pi]$ o integral pretendido é:

$$\begin{aligned} \int_{S_R} K\,dA &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{4}{(1+4u^2)^2} u\sqrt{1+4u^2}\,dvdu \\ &= 8\pi \int_0^R u(1+4u^2)^{-3/2}du = 8\pi \left[\frac{(1+4u^2)^{-1/2}}{-4} \right]_0^R. \end{aligned}$$

O limite pedido é então finito e igual a 2π, que é metade da área da esfera unitária.

(5) Seja S uma superfície em $\mathbb{R}^3$ e Γ uma curva no plano. Indique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. Justifique cada caso, demonstrando ou dando um contra-exemplo, conforme apropriado.
(a) Existe um caminho regular fechado (no plano) cuja imagem é o segmento de recta $I = \{(x,0) : x \in [-1,1]\} \subset \mathbb{R}^2$.
(b) Se Γ é uma curva aberta (isto é, cujos extremos não coincidem), a sua curvatura total é um múltiplo inteiro de 2π.

(c) Dado um mapa regular ϕ, o referencial $\{\frac{\phi_u}{||\phi_u||}, \frac{\phi_v}{||\phi_v||}, \frac{\phi_u \times \phi_v}{||\phi_u \times \phi_v||}\}$ é ortonormado em todos os pontos.
(d) Sejam $k_1 \leq k_2$ as curvaturas principais de S e supomos que existe $C \geq 0$ com $|k_2| \leq C$. Então, qualquer curva $\Gamma \subset S$ tem curvatura $\kappa \leq C$ (como curva no espaço).
(e) Se $K > 0$, então qualquer curva $\Gamma \subset S$ tem curvatura $\kappa > 0$ (como curva no espaço).

Resolução possível:
(a) Falsa. Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ um caminho fechado cuja imagem é I. Supomos que $\gamma(t)$ começa e termina num ponto interior $\gamma(a) = \gamma(b) = (x_0, 0) \in I$ ($x_0 \in]-1, 1[$). Como $\gamma([a, b]) = I = \{(x, 0) : x \in [-1, 1]\}$ tem que haver $c \in]a, b[$ com $\gamma(c) = (1, 0)$. Para esse parâmetro $t = c$, a coordenada x de γ atinge o seu máximo. Por outro lado, a coordenada y de $\gamma(t)$ é sempre zero. Assim, ou $\gamma'(c) = 0$ ou a derivada não existe. Em qualquer dos casos, $\gamma(t)$ não é regular. O caso em que γ começa (e termina) num extremo de I é semelhante.
(b) Falsa. O caminho $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ com $t \in [0, \pi]$ é aberto (entre $\gamma(0) = 1$ e $\gamma(\pi) = -1$) e a sua curvatura total é π (verifique!).
(c) Falsa. O mapa regular $\phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ tem $\phi_u = (1, 0, 2u)$ e $\phi_v = (0, 1, 2v)$ pelo que $\phi_u \cdot \phi_v = 4uv \neq 0$ em geral. Se dividirmos cada um dos vectores pelas suas normas, o produto interno continua a não ser nulo, pelo que o referêncial dado não é, em geral, ortonormado (nem ortogonal).
(d) Falsa. Seja S um plano. Então $k_1 = k_2 = 0$ e podemos tomar $C = 0$. Agora seja Γ uma circunferência nesse plano. Então $\kappa > 0$ (é o inverso do raio da circunferência) e por isso κ não é menor ou igual a $C = 0$.
(e) Verdadeira. Se $K > 0$ então ambas as curvaturas principais podem ser consideradas positivas $0 < k_1 \leq k_2$ (trocando a orientação da normal unitária n, caso necessário). Isto significa que as curvaturas seccionais (sempre entre k_1 e k_2) são todas positivas, o que implica que no plano correspondente a essa secção, a melhor aproximação a qualquer curva $\Gamma \subset S$ é uma circunferência de raio $r > 0$ compreendido entre $1/k_2$ e $1/k_1$. Assim, $\kappa > 0$ para qualquer curva que esteja contida em S.